1) (c) (i) neplatí, stačí zvolit například $f(x)=x^2$

(ii) platí, víme, že pro konvexní funkci f platí

$$(*)\quad \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \qquad x<y<z.$$

Položme $a_n = f(n+1)-f(n) = \dfrac{f(n+1)-f(n)}{(n+1)-n}$.

Potom podle $(*)$ (pro $x=n-1,\ y=n,\ z=n+1$) platí

$a_n \le a_{n+1}$ $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\{a_n\}$ je tedy monotónní a má limitu.

(iii) platí, dokážeme silnější tvrzení,

totiž, že f je spojitá zprava v bodě 13,

tj., že $\lim\limits_{x\to 13+} f(x) = f(13)$ $(*)$

Předpokládejme pro spor, že $(*)$ neplatí,

potom $\exists \varepsilon>0\ \forall 1>\delta>0\ \exists x_\delta \in P(13,\delta): |f(x_\delta)-f(13)| > \varepsilon$

Potom ale

$$\lim_{\delta\to 0+} \left| \frac{f(x_\delta)-f(13)}{x_\delta - 13} \right| = +\infty.$$

To ale není možné, jelikož

$$f(13)-f(12) \le \frac{f(x_\delta)-f(13)}{x_\delta - 13} \le f(14)-f(13) \quad \delta \in (0,1).$$

(iv) neplatí, stačí položit $f(x) = |x-13|$.

(v) platí, stačí si uvědomit, že funkce

$$h : \delta \to \frac{f(13+\delta) - f(13)}{\delta}$$ je monotónní,

a tedy existuje $\lim\limits_{\delta \to 0+} h(\delta) = f'_+(13)$

(2) (c) (i) platí, (sporem) pokud $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$,

potom $\lim_{x\to-\infty} (f(x))^2 = L^2 \in \mathbb{R}$.

(ii) platí, volme $\varepsilon > 0$, chceme ukázat, že

$$\exists \delta > 0 \ \forall x \in P(-\infty, \delta) : \left| \frac{1}{f(x)} \right| < \varepsilon .$$

Z předpokladu $\lim_{x\to-\infty} (f(x))^2 = +\infty$ víme, že

$$(*) \ \forall \gamma > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in P(-\infty, \delta) : (f(x))^2 > \frac{1}{\gamma}$$

protože pro $\gamma > 0$ platí $(f(x))^2 > \frac{1}{\gamma} \iff \left| \frac{1}{f(x)} \right| < \sqrt{\gamma}$

stačí tedy použít $(*)$ pro $\gamma = \varepsilon^2$.

(iii) neplatí, stačí zvolit

$$f(x) = 2\pi n , \quad x \in [n, n+1) , \ n \in \mathbb{Z}.$$

Potom $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 0 = 0$.

(3) (i) neplatí, protože $0 \neq 1$ muselo by platit $0<1$, nebo $1<0$. Potom

$$0<1 \iff 0+1<1+1 \iff 1<0,$$

což není možné.

(ii) platí, podle věty o hustotě platí, že

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \exists a_n\in\left(a-\tfrac{1}{n}, a\right): a_n\in\mathbb{Q}.$$

Potom (napr. podle věty o dvou strážnících)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

(iii) platí, postupujeme podobně jako v předchozím příkladu, jen posloupnost $\{a_n\}$ volíme rekurentně tak, že

$$a_1 = \lfloor a \rfloor - 1 < a,$$

$a_{n+1}\in\mathbb{Q}$ volíme aby $a_n \in \left(a-\frac{1}{n}, a\right)\cap(a_n, a)$, $n\in\mathbb{N}$.

Potom $\{a_n\}$ je rostoucí a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ stejně jako v předchozím příkladu.